E=mc² voor dummies

Voor een deeltje dat we versnellen van een snelheid 0 tot een snelheid v geldt

$$E_k = \int F\,dx = \int \frac{dp}{dt}dx = \int \frac{dp}{dt} v\,dt = \int v\,dp$$

Voor relativistische snelheden geldt $p = \frac{m}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}.v$ (zie Wikipedia)

m is de z.g. rustmassa.

$\frac{v}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$ vervangen we door x

=> $1/x^2 = 1/v^2 - 1/c^2$ dus $1/v^2 = 1/x^2 + 1/c^2$ => $v = c.\frac{x}{\sqrt{c^2+x^2}}$

Bovenstaande integraal is nu te herschrijven als:

$$E_k = mc\int_0^x \frac{x}{\sqrt{c^2+x^2}}dx = m\,c\left[\sqrt{c^2+x^2}\right]_0^x$$

Het vinden van de primitieve functie van de integraal is vooral een kwestie van proberen. Hoe vaker je het doet hoe sneller je de oplossing vindt. Ook kun je de integraal oplossen met online integrator van Wolfram (zie hier)

Tussen de grenzen 0 en x :

$$E_k = mc\sqrt{c^2+x^2} - mc^2$$

Hier staat dat de kinetische energie gelijk is aan de totaal energie

$E_{tot} = mc\sqrt{c^2+x^2}$ **minus** de energie in rust ($v=0$ dus $x=0$) waarvoor geldt

$E_{rust} = mc\sqrt{c^2+0} = mc^2$ ($E = mc^2$)

Uit $x = \frac{v}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$ volgt dat $v = \frac{x}{\sqrt{1+(\frac{x}{c})^2}}$ of $v = \frac{1}{\sqrt{1/x^2 + 1/c^2}}$ waaruit volgt dat

$\sqrt{1+x^2/c^2} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ **zie: Relativiteitstheorie voor dummies**

De vergelijking E_k herschreven voor v :

$$E_k = mc\sqrt{c^2+x^2} - mc^2 = mc^2\sqrt{1+x^2/c^2} - mc^2 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right)$$ (Wikipedia)